UM ESTUDO SOBRE A VARIAÇÃO DA DURAÇÃO DO DIA AO LONGO DO ANO EM FUNÇÃO DA LATITUDE LOCAL

A STUDY ON THE CHANGE IN THE LENGTH OF THE DAY DURING THE YEAR FOR EACH LOCAL LOCAL LATITUDE

E. P. Cecílio Jr.[1]

[1]PPGECE / UFSCar / edbig@uol.com.br

Resumo

O presente artigo discute a duração do dia em função do dia do ano e da latitude do local de observação. São analisados diversos dados de horários de nascimento e ocaso do Sol e, a partir dessa análise, encontra-se um modelo matemático para descrever o fenômeno. Os dados são obtidos através de softwares disponíveis na internet. O modelo é bastante satisfatório e descreve de forma precisa a duração do dia, inclusive para latitudes grandes, onde algumas correções devem ser feitas. Temas como solsticios, equinócios e estações do ano são também discutidos. O trabalho serve não só como referência, mas também como sugestão de aplicação em sala de aula, já que trata-se de uma atividade muito interessante e com caráter altamente interdisciplinar, envolvendo diversas áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Duração do dia; Latitude; Modelagem Matemática; Astronomia.

Abstract:

This article discusses the duration of the day depending on the day of the year and the latitude of the observing site. Many data of times of sunrise and sunset of the Sun are analyzed, and from this analysis it is found a mathematical model to describe the phenomenon. The data is collected through software available on the internet. The model is quite satisfactory and describes accurately the length of the day, even for large latitudes, where some corrections must be made. Topics such as solstices, equinoxes and seasons are also discussed. The work represents not only a reference, but it is also suggested to be used in classroom since it is a very interesting and highly interdisciplinary activity, involving many areas of knowledge.

Keywords: Length of Day; Latitude; Mathematical Modeling; Astronomy.

INTRODUÇÃO:

Os dias não são todos iguais! No verão, o Sol nasce mais cedo e se põe mais tarde, ou seja, os dias são mais longos que as noites. Já no inverno, o Sol nasce mais tarde e se põe mais cedo, fazendo com que os dias fiquem mais curtos e as noites mais longas.

A latitude do local de observação também influencia nesse efeito. Quem mora em locais muito ao Sul do Brasil, sabe que no inverno os dias são muito curtos e no verão muito longos. Já quem mora em locais mais próximos da linha do Equador não presencia uma variação tão grande assim na duração do dia. No inverno os dias são apenas um pouco mais curtos que no verão.

Entender como a duração do dia muda ao longo do ano e de acordo com a latitude do local de observação é muito importante e interessante e envolve conceitos de diversas áreas do conhecimento como Geografia, Física, Astronomia e Matemática.

Neste trabalho, será mostrado como o horário do nascimento e do pôr do Sol variam ao longo do ano. Através destes dados, pode-se também estudar como varia a duração do dia. O estudo se inicia com a análise do nascimento e do pôr do Sol em um local de latitude 23° Sul, ou seja, num local próximo ao trópico de Capricórnio. Analisando o comportamento da duração do dia, pode-se concluir que este fenômeno pode ser modelado por uma função matemática elementar. Depois, analisando o comportmanto da duração do dia em outras latitudes, pode-se chegar a um modelo matemático bem simples para a duração do dia em latitudes menores que 45°. Para latitudes maiores, o modelo deixa de ser simples, mas através de tabelas, pode-se também prever seu comportamento.

OBTENDO OS DADOS PARA A ANÁLISE:

O primeiro passo é construir uma tabela com os horários em que o Sol nasce e se põe ao longo do ano. Não é necessário registrar esses dados todos os dias, mas quanto mais medidas, mais confiável será a análise e mais preciso será o modelo matemático que descreverá o fenômeno. Neste trabalho, foram realizadas uma medida a cada dez dias. Foram incluidas as datas dos solticios de verão (21 de dezembro) e de inverno (21 de junho) e dos equinócios de primavera (22 de setembro) e de outono (21 de março). Essas datas tem uma característica especial: no solticio de verão temos o dia mais longo do ano e no de inverno o dia mais curto do ano. Nos equinócios os dias e noites tem igual duração. Essas datas são importantes pois podem dar indícios da amplitude e do eixo de simetria de um possivel modelo matemático para descrever a duração do dia.

Graças à tecnologia, não é necessáro acordar cedo todo dia e observar a hora que o Sol nasce e depois ficar olhando para o horizonte no fim da tarde esperando que o Sol se ponha. Já existem páginas da internet que fornecem esses dados de forma rápida e precisa, evitando uma rotina desgastante e até impossivel de ser realizada para uma pessoa que precisa cumprir horários de trabalho e outros compromissos. A página sugerida é a da NOAA – National Oceanic and Atmospheric Association, uma agência federal americana que estuda e monitora as condições da Atmosfera e dos Oceanos. Neste site existe uma ‘calculadora solar’. Basta escolher a data e o local de observação através da latitude e longitude que, ao clicar no botão “calculate sunrise/sunset”, a hora em que o Sol nasce e se põe é mostrada. O endereço da página é: http://www.srrb.noaa.gov/highlights/sunrise/sunrise.html.

Outra forma de se conseguir esses dados é usando o software Stellarium, disponivel no seguinte endereço para download: www.stellarium.org. O software simula a aparência do céu de qualquer localidade da Terra e em qualquer horário. A sua grande vantagem é que a coleta de dados fica mais ‘realista’. O usuário terá realmente a impressão de estar vendo o Sol nascer e se pôr, fazendo com que a atividade fique mais parecida com algo real.

ALGUNS CUIDADOS:

Escolha do Local de Observação:

Para a coleta dos dados, foi escolhida a longitude zero, ou seja, a longitude do meridiano de Greenwich. Porém, pode-se construir tabelas de horários para outras localidades, bastando informar a longitude do local de interesse, no site da NOAA. Os horários em que o Sol nasce e se põe para uma latitude fixa irão mudar de acordo com a longitude mas, a duração do dia, ou seja a diferença entre o pôr e o nascer do Sol, que é o que será analisado nesse trabalho, será constante.

Correção do Nascer e Pôr-do-Sol:

Quando o Sol nasce? Será que é quando a parte superior de seu disco atinge o horizonte, ou seja, é quando o Sol acaba de aparecer? Ou seria quando o Sol todo aparece no céu? A resposta é: depende de como o nascer do Sol é definido. Na maioria das páginas que calculam o nascer e pôr do Sol, inclusive na página da NOAA, o nascer do Sol é definido quando o Sol acaba de aparecer, ou seja, quando a parte superior do disco solar encontra o horizonte e o pôr do Sol se dá quando o Sol todo some, ou seja, quando a parte superior do disco solar toca o horizonte. Essa definição faz com que os dias sejam ligeiramente mais longos que as noites. Uma forma de deixar dias e noites mais simétricos seria admitir o nascer e o pôr do Sol quando metade do Sol atinge o horizonte. Assim, para transformar o nascer e o pôr-do-Sol informado pelo site em nascer e pôr-do-Sol “corrigidos para preservar a simetria”, basta adicionar e subtrair “meio pôr-do-Sol” às medidas. O pôr do Sol dura aproximadamente 7,2 minutos o que equivale a 0,12 horas. Assim, a correção consiste em somar 0,06 h ao nascer do Sol e subtrair 0,06 h do pôr-do-Sol.

Dia do ano:

Como o comportamento esperado da duração do dia ao longo do ano é algo periódico, serão usadas funções trigonométricas para descrever o fenômeno. Primeiramente, deve-se descobrir que dia de 1 a 365, que será denotado por d, corresponde a certa data no formato dia/mês. A forma mais simples de se fazer isso é através de um cálculo direto. Assim, o dia 23 de janeiro, 23/01, é o dia d=23. O dia 5 de fevereiro, 05/02, é o dia 31+5 = 36. O dia 10 de abril, 10/04, é o dia 31+28+31+10 = 100, e assim por diante. Se o ano for bissexto, haverá um dia a mais que comparado com os 365 dias do ano não provocará grandes alterações no resultado final. Feito isso, através de uma proporção simples, podemos associar um ângulo θ em radianos a cada dia do ano d. Para d=1 temos θ=0° e para d=366 (primeiro de janeiro do ano seguinte), temos θ=2π rad. Assim:

$$\theta = \frac{2.\pi.(d-1)}{365}$$

RESULTADOS PARA A LATITUDE 23° SUL

A tabela 1 a seguir mostra o nascimento e o pôr do Sol fornecido pelo site da NOAA e o nascer e pôr do Sol com a correção de simetria (Nascer’ e Pôr’) além da duração do dia em função do dia do ano, nos formatos dia/mês e d e em função do ângulo θ associado a d para a latitude de 23° Sul.

DIA	MÊS	d	θ	Nascer	Pôr	Nascer'	Pôr'	Duração do Dia	DIA	MÊS	d	θ	Nascer	Pôr	Nascer'	Pôr'	Duração do Dia
1	1	1	0,00	5,3	18,82	5,36	18,76	13,4	30	6	181	3,10	6,68	17,43	6,74	17,4	10,63
10	1	10	0,16	5,4	18,85	5,46	18,79	13,33	10	7	191	3,27	6,68	17,48	6,74	17,4	10,68
20	1	20	0,33	5,52	18,85	5,58	18,79	13,21	20	7	201	3,44	6,65	17,57	6,71	17,5	10,8
30	1	30	0,50	5,63	18,8	5,69	18,74	13,05	30	7	211	3,62	6,58	17,63	6,64	17,6	10,93
10	2	41	0,69	5,75	18,72	5,81	18,66	12,85	10	8	222	3,80	6,48	17,7	6,54	17,6	11,1
20	2	51	0,86	5,85	18,6	5,91	18,54	12,63	20	8	232	3,98	6,35	17,77	6,41	17,7	11,3
28	2	59	1,00	5,92	18,5	5,98	18,44	12,46	30	8	242	4,15	6,22	17,82	6,28	17,8	11,48
10	3	69	1,17	6	18,35	6,06	18,29	12,23	10	9	253	4,34	6,03	17,87	6,09	17,8	11,72
20	3	79	1,34	6,07	18,18	6,13	18,12	11,99	22	9	265	4,55	5,83	17,93	5,89	17,9	11,98
30	3	89	1,52	6,12	18,03	6,18	17,97	11,79	30	9	273	4,68	5,7	17,98	5,76	17,9	12,16
10	4	100	1,70	6,18	17,85	6,24	17,79	11,55	10	10	283	4,85	5,53	18,03	5,59	18	12,38
20	4	110	1,88	6,25	17,72	6,31	17,66	11,35	20	10	293	5,03	5,4	18,1	5,46	18	12,58
30	4	120	2,05	6,32	17,58	6,38	17,52	11,14	30	10	303	5,20	5,27	18,18	5,33	18,1	12,79
10	5	130	2,22	6,38	17,48	6,44	17,42	10,98	10	11	314	5,39	5,17	18,3	5,23	18,2	13,01
20	5	140	2,39	6,47	17,42	6,53	17,36	10,83	20	11	324	5,56	5,12	18,42	5,18	18,4	13,18
30	5	150	2,57	6,53	17,37	6,59	17,31	10,72	30	11	334	5,73	5,1	18,52	5,16	18,5	13,3
10	6	161	2,75	6,62	17,37	6,68	17,31	10,63	10	12	344	5,90	5,12	18,63	5,18	18,6	13,39
21	6	172	2,94	6,67	17,38	6,73	17,32	10,59	21	12	354	6,08	5,18	18,75	5,24	18,7	13,45

Tabela 1: *Dados para a latitude 23° Sul*

ANÁLISE DOS DADOS E MODELAGEM MATEMÁTICA DO FENÔMENO

Foram feitos os gráficos do nascimento e ocaso do Sol em função do ângulo θ, como mostrado na figura 1. Percebe-se que o comportamento do horário do nascimento e do por do Sol ao longo do ano não é tão simples. Trata-se, claro, de uma função periódica, mas não se assemelha a nada muito direto e trivial, como uma função seno ou cosseno. A surpresa aparece quando é feito o gráfico da duração do dia, ou seja, o horário de pôr-do-Sol menos o horário de nascimento do Sol. Apesar do comportamento irregular dos horários de nascimento e ocaso do Sol, a duração do dia apresenta um comportamento que lembra uma função trigonométrica simples, mais especificamente do tipo cosseno, quase partindo da Amplitude máxima.

Assim, vamos modelar o problema da duração do dia através de uma função do tipo:

$$H = A_0 + A.\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Perceba que a duração do dia não possui um eixo de simetria horizontal que coincide com eixo das abcissas, o que faz necessário o uso do parâmetro A_0, definido como:

$$A_0 = \frac{A_{max} + A_{min}}{2}$$

Nesta expressão, A_{max} é a amplitude máxima, ou seja, a duração do dia no solstício de verão (21 de dezembro) e A_{min} é a amplitude mínima, ou seja, a duração do dia no solstício de inverno (21 de junho). Analogamente, também temos que:

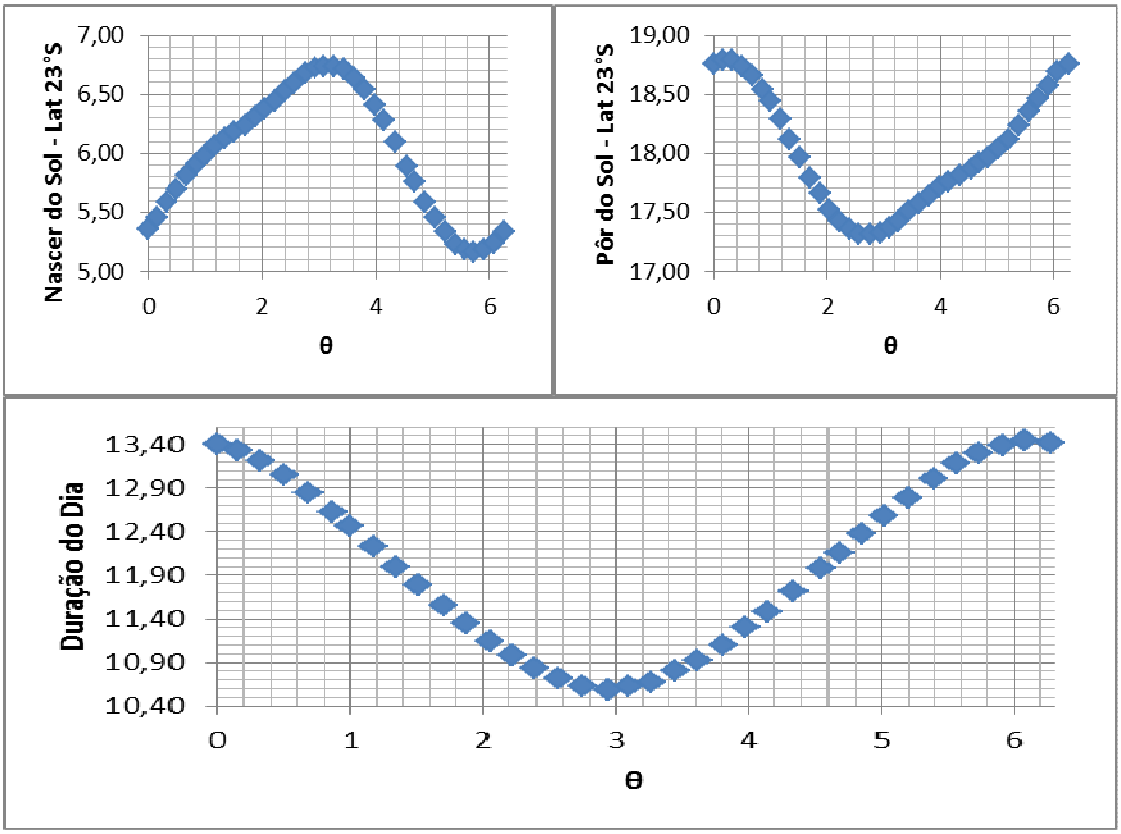

Figura 1: *Gráficos do nascer, pôr do Sol e duração do dia para latitude 23° Sul.*

$$A = \frac{A_{max} - A_{min}}{2}$$

O parâmetro ω associado à função cosseno é definido por:

$$\omega = \frac{2.\pi}{T}$$

Neste caso, T é o período, que vale 2π rad, o que faz com que ω seja 1,0. Perceba que se o ano começasse no solstício de verão, ou seja, no dia 21 de dezembro, o gráfico seria uma função cossenoidal começando na Amplitude máxima, sem fase inicial. Como o ano não se inicia no solstício, mas alguns dias depois, uma fase inicial φ_0 é necessária para deslocar a função cosseno para seu lugar correto. A fase inicial pode ser assim calculada:

$$\cos \varphi_0 = \frac{H_0 - A_0}{A}$$

Nesta expressão, H_0 é a duração do dia no dia d=1, ou seja, quando θ=0°. Assim, para a latitude de 23° Sul, temos: $A_{max} = 13{,}45\ h$ e $A_{min} = 10{,}59\ h$.

Usando os dados obtidos a partir da tabela 1, podem-se calcular os parâmetros da função cosseno que descreve o fenômeno da duração do dia.

Os valores obtidos foram: $A_0 = 12{,}0\ h$, $A = 1{,}43\ h$ e $\varphi_0 = 0{,}22\ rad$.

Isso faz com que a Expressão para o cálculo da duração do dia em um local de latitude 23° Sul, em função do ângulo θ associado ao dia 'd' do ano seja:

$$H = 12{,}0 + 1{,}43.\cos(\theta + 0{,}22)$$

Na figura 2, temos a representação dessa função em vermelho e os pontos obtidos pelo site da NOAA em azul. Perceba que a função possui um excelente ajuste.

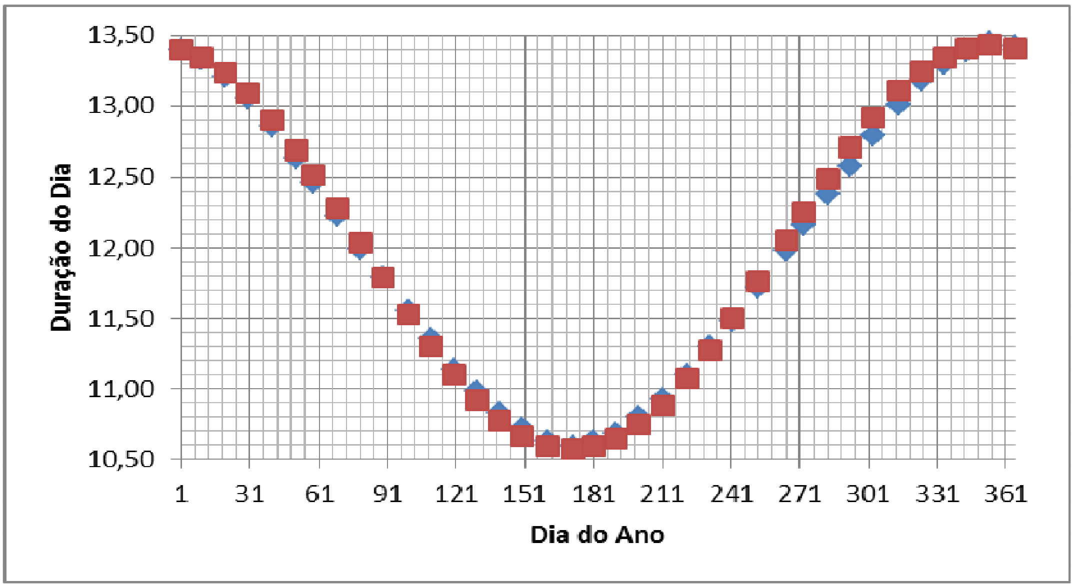

Figura 2: *Dados do site e dados gerados pela função ao longo do ano*

Esse gráfico revela várias informações importantes: No dia d=80, ou seja, no dia 21 de março, o dia tem duração de exatamente 12 horas. É o equinócio de outono. De 21 de março até 21 de junho, os dias vão ficando mais curtos, sendo que o dia 21 de junho é o dia mais curto do ano, ou seja, é o solstício de inverno. Depois os dias voltam a ficar mais longos e a situação volta ao eixo de simetria no dia 22 de setembro, o equinócio de primavera. Finalmente, os dias vão ficando mais logos e no dia 21 de dezembro, no solstício de verão, temos o dia mais longo do ano.

Perceba que o dia dura 12 horas no dia 21 de março e chega a durar apenas 10,60 h, aproximadamente, no dia 21 de junho. É uma diferença de uma hora e meia, quase. Entre os solstícios de verão e inverno, a diferença é de quase 3 horas, isto é, no dia 21 de dezembro o dia é 3 horas mais longo que a noite, comparado com o dia 21 de junho!

Finalmente, para o hemisfério norte, tudo se passa com os mesmos parâmetros, mas com os sinais trocados, ou seja, quando é o solstício de verão aqui, é o de inverno lá, e vice-versa, ou seja:

$$H_{norte} = -A_0 - A.\cos(\omega t + \varphi_0)$$

É importante salientar que tudo isso acontece por causa da inclinação do eixo de rotação da Terra. O eixo de rotação da Terra forma um ângulo de 23° com a perpendicular ao plano da ecliptica, o que faz com que as estações do ano aconteçam e que haja, assim, variações de temperatura e variação na duração dos dias. Percebe-se que tudo isso acontece devido à diferença da incidência dos raios solares nas diferentes partes do globo e não por causa da excentricidade da órbita da Terra. A órbita da Terra é quase uma circunferência, com excentricidade 0,016. Além disso, quando é verão no hemisfério Sul, é inverno no Norte e vice-versa. Os desenhos de alguns livros, exagerando a excentricidade da órbita da Terra, podem ser a causa desses enganos muito comuns entre as pessoas.

A PRECISÃO DO MODELO:

Pode-se ver na figura 2 que o ajuste da função cosseno aos dados é muito bom. Entretanto, como bom e ruim são conceitos abstratos e subjetivos, foi calculado o erro percentual de cada valor medido comparado com o valor gerado pela função, usando 24 horas como padrão, ou seja:

$$\varepsilon = \frac{H_{função} - H_{real}}{24}.100$$

Os módulos desses erros foram somados e essa soma foi dividida pelo numero de medidas, para encontrarmos o erro relativo médio.

O erro relativo médio encontrado foi muito pequeno, de apenas 0,19%. Para outras latitudes de até 45°, o erro relativo médio nunca foi superior a 1%.

RESULTADOS PARA OUTRAS LATITUDES:

Foram construídos tabelas e gráficos semelhantes para outras latitudes e os parâmetros da função cosseno foram calculados. A seguir, na tabela 2, mostramos alguns resultados.

Percebe-se que o parâmetro A_0 mostra-se constante, valendo 12,0 horas, ou seja, o eixo de simetria da função cosseno é sempre em H=12,0 horas. Isso significa que nos equinócios, o dia tem 12 horas para qualquer latitude! O ângulo de fase inicial φ_0 também se mostrou constante, já que, a distância entre o solstício de verão e o inicio do ano é constante, para qualquer latitude.

Latitude Sul	A_0	A	φ_0
0	12,0	0,01	0,00
10	12,0	0,59	0,22
23	12,0	1,43	0,21
45	12,0	3,43	0,21

Tabela 2: *Parâmetros da função modeladora para outras latitudes*

O interessante é que a Amplitude da função cosseno aumenta com a latitude, ou seja, quanto maior a latitude, maior é a diferença da duração do dia entre o solstício e o equinócio. Perceba que, enquanto que na latitude 10°, a amplitude é de apenas 0,59 horas, na latitude de 45° (mais ao Sul do Rio Grande do Sul) a amplitude é de 3 horas e meia, quase. Isso quer dizer que em uma localidade a uma latitude de 45° Sul, o dia no solstício de verão é 7 horas mais longo que no solstício de inverno!

Mais interessante ainda é notar que na linha do Equador, na latitude zero, a Amplitude é praticamente nula, ou seja, todos os dias do ano têm 12 horas de Sol e 12 horas de noite.

A FUNÇÃO GERAL:

Basta agora, descobrir qual a dependência da Amplitude com a Latitude, para obtermos uma função geral que descreva o comportamento da duração do dia em função do dia do ano para qualquer latitude.

Vamos dividir a análise em três casos: latitudes de até 45°, latitudes entre 45° e 67° e latitudes superiores a 67°.

Na tabela 3 temos os valores das Amplitudes para cada latitude, até 45°. Plotando os valores dessa tabela, verifica-se que não existe uma função simples que relaciona os dados. Entretanto, ao plotar a Amplitude em função da tangente da latitude, obtemos como resultado o gráfico da figura 3.

Latitude Sul	Amplitude
0	0,000
5	0,295
10	0,595
15	0,900
23	1,430
30	1,935
35	2,360
40	2,845
45	3,430

Tabela 3: *Amplitudes para diversas latitudes abaixo de 45°*

Ou seja, para latitudes de até 45° Sul (que contempla todo o território do Brasil), a Amplitude é diretamente proporcional à tangente da latitude, ou seja:

$$A = 3{,}41 \cdot \tan(lat)$$

Assim, a expressão geral para obtermos a duração do dia em função do dia 'd' do ano, para qualquer latitude de até 45° é:

$$H = 12{,}0 + [3{,}41 \cdot \tan(lat)] \cdot \cos\left(\left[\frac{2.\pi.(d-1)}{365}\right] + 0{,}22\right)$$

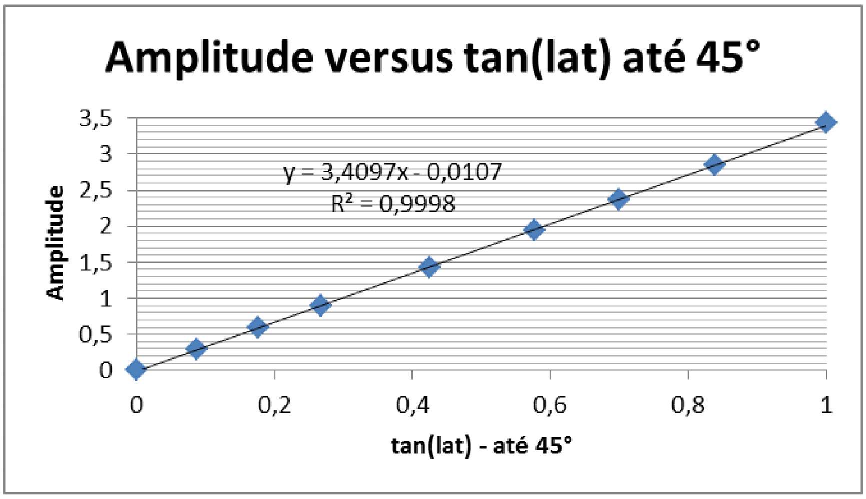

Figura 3: *Amplitude em função da tangente da latitude*

Acima de 45°, a Amplitude passa a variar de forma mais complexa com a tangente da latitude e a descrição matemática fica mais difícil. Inclusive, existe uma latitude onde a Amplitude chega a ser 12 horas! Isso significa que no solstício de verão, o dia dura 24 horas! E no solstício de inverno o dia dura 0 hora, ou seja, o Sol não nasce! Isso ocorre no circulo polar antártico, a uma latitude de aproximadamente 67° Sul. Para essas latitudes, de 45° a 67°, é mais conveniente medir a Amplitude através do site da NOAA e usar a equação:

$$H = 12{,}0 + A' \cdot \cos\left(\left[\frac{2.\pi.(d-1)}{365}\right] + 0{,}22\right)$$

Na tabela abaixo mostramos algumas dessas amplitudes, para consulta:

Latitude	A'
45	3,43
50	4,155
55	5,105
60	6,5
67	12

Tabela 4: *Amplitudes para latitudes entre 45° e 67°*

Além do circulo polar antártico, existem períodos de noite e dia absolutos! Dependendo da latitude e da época do ano, pode acontecer de o Sol não nascer durante meses, ou de o Sol não se pôr durante meses. Matematicamente, a Amplitude excede 12 horas, o que significaria dias com mais de 24 horas ou com duração negativa.

Entretanto, se limitarmos o eixo das ordenadas em zero e 24 horas e escolhermos amplitudes convenientes, a função cosseno também descreve o comportamento da duração dos dias. Para descobrir a Amplitude que faz com que a função se comporte adequadamente, basta descobrir, no site da NOAA, a primeira data do ano que o Sol deixa de nascer. No site, a mensagem *'no sunset'* irá aparecer. Nesta data, que denotaremos por D, H=0. Assim:

$$A' = \frac{-12}{\cos\left(\left[\frac{2.\pi.(D-1)}{365}\right] + 0{,}22\right)}$$

Dessa forma, podemos continuar usando a mesma equação abaixo sem problema algum:

$$H = 12{,}0 + A' \cdot \cos\left(\left[\frac{2.\pi.(d-1)}{365}\right] + 0{,}22\right)$$

Na tabela abaixo, listamos alguns valores de Amplitudes já calculadas, para referência:

Latitude	A'
70	13,82
75	18,9
80	28,8
85	77,9

Tabela 5: *Amplitudes para latitudes maiores que 67°*

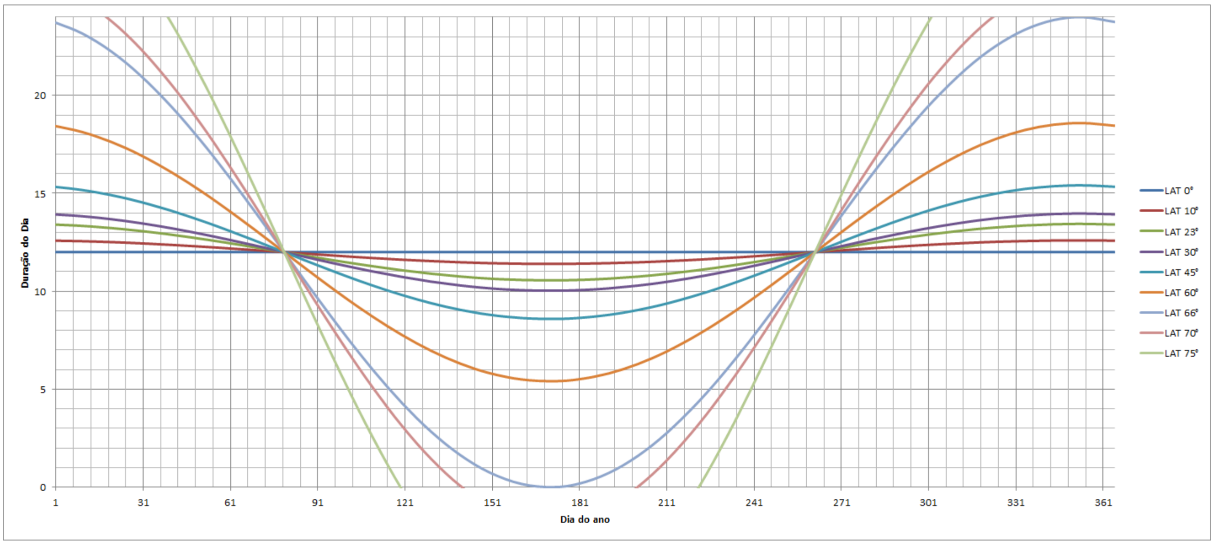

Figura 4: *Duração do dia para diversas latitudes*

Finalmente, na figura 4 temos o gráfico da duração do dia em função do dia do ano para diversas latitudes. Este gráfico é de vital importância e serve como uma síntese do comportamento da duração do dia ao longo do ano para qualquer latitude.

CONCLUSÃO:

O estudo da duração do dia em função do dia do ano e da latitude pode ser modelado por uma função matemática trigonométrica simples, para latitudes de até 45°, o que, para aplicações do dia-a-dia aqui no Brasil é mais do que suficiente. Para latitudes superiores, a função é mais complexa, mas fazendo uso de valores tabelados da Amplitude, a mesma função trigonométrica pode ser usada.

O entendimento deste fenômeno é fundamental para diversas áreas do conhecimento, como Geografia e Astronomia e faz uso de diversas outras disciplinas como Física e Matemática.

Esperamos que este artigo preencha uma lacuna existente sobre o assunto e sirva de referência para professores, não só para entender o assunto, mas também para implementar alguns ou todos os procedimentos aqui discutidos em sala de aula. Vários assuntos como solstícios, equinócios, estações do ano, modelos matemáticos, trigonometria, gráficos, funções e erros podem ser abordados, dando um caráter interdisciplinar às aulas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

BOAS M.L. **Mathematical Methods in the Physical Sciences,** New York, Wiley, 1961

FARIA R. P. **Fundamentos de Astronomia,** São Paulo, Papirus, 1987

FOWLES G. e CASSIDY G. **Analytical Mechanics.** Orlando, Saunders College Publishing, 1990

GAMOW G. **The Great Physicists from Galileo to Einstein.** New York, Dover, 1964

NUSSENZVEIG H.M. **Curso de Física Básica – Vol 1.** São Paulo, Blucher, 2002.