UNA PROPUESTA DE LA ASTRONOMÍA PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: MEDICIÓN DE LOS CRÁTERES LUNARES

AN ASTRONOMICAL PROPOSAL FOR TEACHING GEOMETRY: THE MEASUREMENT OF LUNAR CRATER DIAMETERS

Rafael Girola[1], Carlos C. Marzocchini[2], Oscar Luna[3], Jorge Escudero[4]

[1] EnDiAs / UNTREF, rafaelgirola@yahoo.com

[2] EnDiAs / Instituto Belgraniano de San Miguel, Buenos Aires, cte_b707@hotmail.com

[3] EnDiAs, oluna63@yahoo.com.ar

[4] EnDiAs, yosoyescu@yahoo.com.ar

Resumen

Esta propuesta es para implementar en los profesorados de Matemática, Física y Astronomía, con el objetivo de utilizar el contenido astronómico en situaciones que requieran destrezas geométricas, físicas y algebraicas mediante el cálculo. Generalmente la materia de Astronomía, se imparte en dos años consecutivos con muy poca carga horaria, y se reduce a un contenido literal e ilustrativo. Sin embargo es una herramienta muy importante en la etapa de la motivación. Aquí pondremos énfasis en mostrar al futuro docente de Matemática y Física, que los contenidos astronómicos, pueden abordarse en distintas etapas del desarrollo de los contenidos específicos que conforman los planes de estudios de ambos profesorados. En este caso proponemos en la clase de Geometría de 4º año del Profesorado de Matemática, tender un puente de investigación con la materia de Astronomía II del Profesorado de Física, para realizar un trabajo sobre mediciones astronómicas, confrontando los resultados con trabajos de divulgación científica y software pertinente a la problemática. La propuesta didáctica que queremos elaborar para la integración de contenidos, el trabajo en equipo y las argumentaciones de los estudiantes del profesorado, es mediante situaciones problemáticas. Una de ellas sería realizar las mediciones de ciertos aspectos del relieve lunar, como es el caso de los cráteres. La situación didáctica planteada, la hemos denominado "Situación didáctica para la medición de los cráteres lunares en el contexto geométrico astronómico". El fundamento y justificación del diseño didáctico, lo presentamos mediante la secuencia de Polya. Se reflexionará sobre las estrategias de la resolución de problemas, realizando comentarios y críticas. Para ello realizaremos una secuencia de actividades que van desde la familiarización y reconocimiento de las construcciones aprendidas, para profundizar en las etapas de identificación, diseño y elaboración de un plan para su solución.

Palabras clave: medición, cráter, luna, didáctica

Abstract

This proposal is meant to be effective in the faculties of Mathematics, Physics and Astronomy. Our intention is to give a more active role to the astronomical content when situations call for geometric, physics and algebraic skills employing calculation. It is usual that the content of Astronomy courses –which are taught for two years in a row with little course load– is filled with documentary films, restraining the course to a literal and illustrative approach. It is mandatory to say that Astronomy is a very important tool in the motivational period of every student. Our aim is to demonstrate to the future professor of Mathematics and Physics that astronomical contents can be placed in several stages of the development of the courses within the curriculum. In this case, we suggest to establishing an investigatory link between the 4th year Geometry course in the faculty of Mathematics and the Astronomy II course in the faculty of Physics in order to incorporate astronomical measurement projects to

the coursework. To develop this didactic proposal, we will employ a series of problems in order to achieve integration among the students, team grouping and student argumentative debates. One of the problems would be how to perform the measurements of certain aspects of the lunar surface as in the case of lunar crater measurements. We have called the former situation, instructional situation for the measurement of lunar craters within the geometric and astronomical context. We present the basis and justification of the instructional design through Polya sequence. To this end, we perform a sequence of activities which vary from familiarity and recognition to objectivity of the constructions learned. The expected result is to construct and to examine the stages of identification and design; as well as to elaborate a plan for its solution.

Keywords: measurement, crater, moon, didactics.

FUNDAMENTACIÓN DEL PROYECTO

A través de este proyecto, proponemos rever las estrategias del profesor para incentivar a sus alumnos, a realizar conexiones integradoras, a partir de un eje motivador, como es la Astronomía, para el abordaje de nuevos conocimientos de Matemática, Geometría y Física.

Esta posibilidad de relacionar la Astronomía, con las demás materias de estudio, nace de nuestra experiencia docente en la formación de futuros profesores, donde observamos la falta de integración de los contenidos de las materias afines, sintiendo que la Astronomía se abordaba desde un aspecto meramente informativo. Esta demanda nos motivó a indagar sobre diferentes estrategias, y plantearnos nuevos desafíos, que nos permitan mostrar la importancia de la Astronomía como disparador de nuevos aprendizajes.

Nos ubicamos, en el Instituto Superior del Profesorado Nro. 34 Héctor Medici, de Palomar, Provincia Buenos Aires, República Argentina, en la carrera Profesorado de Matemática y Física. Hemos elegido relacionar la Geometría, con la Astronomía, a partir de situaciones problemáticas concretas, utilizando como recorte la orografía de la LUNA.

Este trabajo se aplicará a utilizar los cráteres lunares como objeto de estudio; esta simple estrategia de motivación, hará que la Astronomía cobre un merecido protagonismo, en los ámbitos de la didáctica.

Como este trabajo está destinado a futuros docentes de “Ciencias exactas”, proponemos realizarlo mediante, un taller, como una alternativa pedagógica, donde se reemplaza la clase formal, por la realización de un trabajo grupal. Será una oportunidad de interrelacionar contenidos, y ejercitar la práctica en la resolución de problemas. Se aplicarán actividades científicas y tecnológicas, desarrollando las habilidades y destrezas matemáticas. Posteriormente se evaluarán los resultados alcanzados, cotejándolos con los datos científicos vigentes.

La LUNA, es el objeto celeste, más cercano a nuestro planeta y del que no es solo su satélite; está presente en el imaginario social, desde que el hombre se paró en la Tierra y pudo elevar su mirada al cielo. Muchas fueron las narraciones y los mitos para poder interpretar los procesos de la naturaleza.

A partir de Galileo y su telescopio, se dejaron de lado las imágenes poéticas y se pudo observar con nitidez la orografía lunar. Aparecieron ante nuestros ojos, cráteres, montañas, valles, penumbras, sombras, zonas claras, zonas oscuras, que nos llevaron a preguntarnos.

¿Qué altura tendrán, las montañas? ¿Cuántos cráteres habrá? ¿Serán profundos? ¿Qué determina, las zonas claras y las oscuras? Estos interrogantes formarán parte de las actividades "A priori" para poder hacer un recorte y plantearnos un punto de partida. En nuestro caso, el propósito será, utilizar fotografías de la Luna, para aplicar el conocimiento de la Geometría, habilidades y destrezas matemáticas para: "Calcular el tamaño y la profundidad de los cráteres lunares".

Una reacción innata de la naturaleza humana es el miedo a los cambios y a lo desconocido. Si bien ello se manifiesta de distintas formas en cada individuo, se exteriorizar a traves de miedos, negaciones y desaliento, provocados por un erróneo juicio sobre las capacidades y posibilidades del individuo.

Imaginemos por un momento la sorpresa de una situación áulica, ante la propuesta de: "Hoy, vamos a medir los cráteres en la luna". En un primer momento, la mayoría, lo creerá imposible, poniendo en duda sus posibilidades de llevar a cabo esa actividad, y sobrevendrá el consecuente desequilibrio cognitivo.

¡Desmitifiquemos! Vamos a ir avanzando progresivamente en el proceso, arrancando desde lo más sencillo, contando con los conocimientos básicos, las ideas previas, nos iremos aproximando, a posibles soluciones. Teniendo siempre en cuenta, que la dificultad, no debe ser tan lejana, que no le permita aplicar herramientas conocidas, ni tan cercana que no significa ningún desafío cognitivo.

En primer lugar, veremos con qué elementos vamos a contar, referidos a la LUNA, según el método que vayamos a utilizar. Lista no excluyente de elementos necesarios: fotografías de la luna; cuadricula lunar con paralelos y meridianos; fotografías de accidentes topográficos y tablas con valores conocidos de los mismos; mapa orográfico; compás, transportador, tabla de funciones trigonométricas o calculadora científica; telescopio y/o prismáticos; etc.

Los alumnos de Geometria tienen conocimientos de transformaciones en el espacio y en el plano, coordenadas esféricas, funciones trigonometricas planas y esféricas, espacios vectoriales, homotecia, escalas, cálculo geométrico, algebra lineal, proporcionalidad, manejo del software Geoebra.

Sugerencias didácticas

Utilizando una imagen de la Luna con sus meridianos y paralelos cartográficos reales, medir un accidente ubicado en la intersección del ecuador lunar y el meridiano que se presenta, centrado, frente al observador. Teniendo en cuenta el diámetro de la LUNA, obtenemos la longitud del Ecuador.

Luego medimos el diámetro del accidente elegido, un cráter y verificamos su relación de tamaño, con la cantidad de veces que este diámetro, es contenido por el diámetro de Ecuador, de esta manera, tan sencilla, aplicando conocimientos básicos, demostramos que el tema se puede ir abordando, desde lo más sencillo, logrando así alejar el preconcepto, de lo difícil, que es afrontar un conflicto cognitivo.

Posteriormente, se podría verificar el resultado obtenido comparándolo con los guarismos disponibles en las tablas adecuadas de los valores reales. Como seguramente esos valores, nos dan resultados aproximados, es muy probable que genere un ambiente de entusiasmo, se despierte el interés de repetir la experiencia con otros objetos, que les permitirán afinar los procedimientos.

Otro paso será observar, otro cráter que esté ubicado en el mismo meridiano, pero un poco más alejado del ecuador, a una latitud X. Aquí

necesitaremos la cuadrícula real de coordenadas lunares para establecer dicha latitud. Sólo resta corregir los valores obtenidos en función del coseno de la latitud, y tenemos resuelto el tema.

La tercera situación será la de un cráter desplazado del centro, tanto en latitud como en longitud. En este caso, al segundo paso anteriormente descrito, se lo ajustará en función del seno de la longitud y procederemos al análisis de los resultados obtenidos.

No desconocemos que hay otros métodos en uso que se pueden implementar, según la creatividad y los recursos con que cuenta, tanto de contenidos, como tecnológicos el grupo de aprendizaje, en este caso futuros formadores. Vaya como ejemplo, el uso de máquinas fotográficas digitales, donde las mediciones se realizarán a través del conteo de píxeles; el uso de telescopios con cuadrículas ópticas; etc. Recordemos que nuestra propuesta es el uso de la Astronomía como eje motivador, para la aplicación de herramientas de la Matemática, de la Geometría y de la Física.

MEDICIÓN DE LA SUPERFICIE DE LOS CRÁTERES DE LA LUNA

Geométricamente la Luna es una esfera de la cual siempre vemos la misma cara, sin considerar la libración lunar.

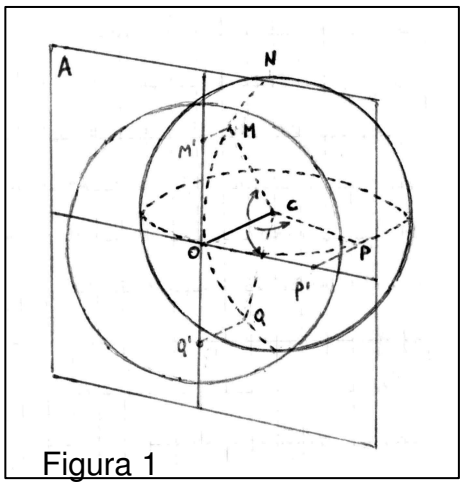

Figura 1

Debido a su lejanía, la luz que nos llega de ella lo hace en forma de haces a los que podemos considerar paralelos, razón por la cual se nos dificulta percibir su esfericidad.

Así que en realidad lo que estamos observando cuando vemos la Luna es un disco desde el cual la luz no llega de manera uniforme, tomando en cuenta claro está, los contrastes propios que nos ofrecen sus mares.

El método que nos permitirá medir la superficie de los cráteres de la Luna consiste básicamente en proyectar sobre el plano de una foto, una red topológica asociable a un sistema de paralelos y meridianos. Esta red tendrá un carácter puramente referencial, es decir que no serán exactamente los paralelos y meridianos con los cuales la Luna ya ha sido cartografiada. Así mismo, el método empleado para su trazado es equivalente.

En la Figura 1 vemos más claramente los elementos con los cuales vamos a trabajar. Consideremos una esfera de centro C y un punto O situado en el Ecuador de dicha esfera, luego establecemos un plano A que es tangente a la esfera en ese punto.

Mientras que O es la proyección de si mismo en el plano A, los puntos M', P' y Q' son las proyecciones en el plano de los puntos de la esfera M, P y Q respectivamente.

Estas proyecciones están basadas en los ángulos que forman los radios en los que se encuentran estos puntos, con el radio OC que parte desde el centro C de la esfera hasta

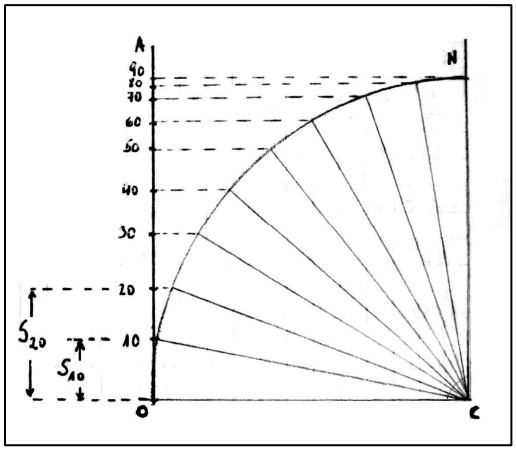

Figura 2

el punto O del Ecuador, que a los fines de no saturar la visual de la figura los marcamos como flechas, las cuales nos indican el sentido del trazado de estos ángulos.

Con estos elementos vamos a detallar los pasos a seguir para el trazado de la red de paralelos que vamos a tomar con una amplitud angular de 10º.

El método consiste en tomar un círculo máximo de la Luna al que definiremos como el Meridiano Origen; este círculo tendrá como centro el punto C de la Luna y pasará por el punto O del Ecuador. (Fig. 1) Una vez calculados los paralelos, los trasladaremos a una foto de la Luna. Luego, con el mismo método trazaremos la red de meridianos y así podremos observar la esfericidad de nuestro satélite natural.

Como vemos en la Figura 2, el segmento OC es el radio de la Luna, y también es el ángulo 0º. Luego tranzando ángulos de 10º, en sentido hacia el punto N, obtenemos gráficamente la proyección ortogonal de dichos ángulos, trazando líneas paralelas a OC, las que a su vez intersecan el plano A. Cada intersección con A la mencionamos con el valor del ángulo correspondiente.

Ahora bien, observando la Fig. 2 notamos que cada uno de estos ángulos, generan en el plano A segmentos S que tienen longitudes diferentes entre sí según el ángulo considerado.

Como convención, vamos a establecer que dado un segmento Sα y siendo α el ángulo considerado para ese segmento, la medida en el plano A de dicho segmento está dada por la siguiente expresión: $S\alpha = OC \cdot \text{Sen}\ \alpha$ (1)

Calcularemos cada segmento de la figura 2, siendo OC = 6 cm.

Tabla 1: Longitud de los segmentos de Fig. 2

S_{10} = 6 cm . Sen 10º = 1,04 cm
S_{20} = 6 cm . Sen 20º = 2,05 cm
S_{30} = 6 cm . Sen 30º = 3,00 cm
S_{40} = 6 cm . Sen 40º = 3,85 cm
S_{50} = 6 cm . Sen 50º = 4,59 cm
S_{60} = 6 cm . Sen 60º = 5,19 cm
S_{70} = 6 cm . Sen 70º = 5,63 cm
S_{80} = 6 cm . Sen 80º = 5,90 cm
S_{90} = 6 cm . Sen 90º = 6,00 cm

Una vez realizados los cálculos correspondientes. Podremos trazar entonces la red de paralelos que nos darán las divisiones del disco lunar de 10º en 10º.

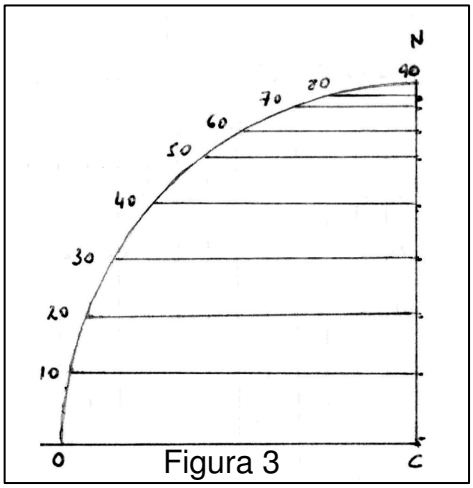

Figura 3

Aquí quedan trazados los paralelos tal cual se verían en la superficie de una esfera, y es muy importante aclarar que las distancias, si bien parecen distintas por estar proyectadas en un plano, en la superficie de una esfera son exactamente iguales.

Observemos que el radio del Ecuador OC, determina un círculo máximo, mientras que los paralelos a 10º, 20º, 30º, etc., determinan círculos cada vez menores, hasta que llegando a 90º,

punto N en Fig. 3, el círculo correspondiente es solo un punto, tal cual sucede con los polos de la Tierra.

Estos círculos paralelos tendrán un radio Rα y siendo α la amplitud angular respecto del ángulo 0º que representa el segmento OC el cual es el radio del Ecuador.

En la Figura 4, tenemos el radio ecuatorial OC y un radio paralelo Rα y siendo α un ángulo que tiene vértice en el centro C de la esfera, y el otro lado del mismo determina el segmento CF que interseca la superficie de la esfera en el punto F, el cual es también un extremo del segmento EP // OC.

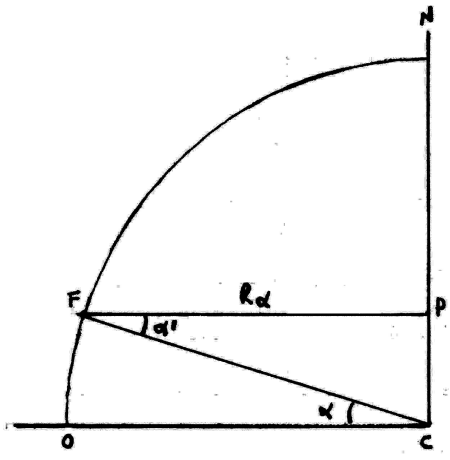

Figura 4

El triángulo CFP tiene un ángulo α' que por ser alterno interno entre paralelas con α, se concluye que: α' ≈ α

De este modo para poder hallar la longitud del radio FP = Rα en términos de OC, utilizaremos la siguiente expresión:

Rα = OC . Cos α (2)

Calcularemos la longitud de los radios paralelos que trazamos en Fig. 3

Tabla 2: Longitudes de radios de Fig. 3

R_0 = 6 cm . Cos 0º = 6,00 cm
R_{10} = 6 cm . Cos 10º = 5,90 cm
R_{20} = 6 cm . Cos 20º = 5,63 cm
R_{30} = 6 cm . Cos 30º = 5,19 cm
R_{40} = 6 cm . Cos 40º = 4,59 cm
R_{50} = 6 cm . Cos 50º = 3,85 cm
R_{60} = 6 cm . Cos 60º = 3,00 cm
R_{70} = 6 cm . Cos 70º = 2,05 cm
R_{80} = 6 cm . Cos 80º = 1,04 cm
R_{90} = 6 cm . Cos 90º = 0,00 cm

Una vez hallados los valores de los radios de los círculos paralelos, para poder trazar a partir de ellos los meridianos, es importante tener en cuenta que la proyección de los meridianos en un plano son arcos de elipse y estos se lograrán a partir de tomar cada radio Rα y aplicar la fórmula (1) para dividirlo en partes de 10º cada uno, o bien, resolviendo el problema en forma gráfica, tal como se describe en Fig. 2, para ir uniendo prolijamente los puntos y así conformar la red topológica que no permitirá tratar como a una esfera a un objeto como la Luna, la cual apreciamos desde la tierra como un disco.

En la próxima figura (Fig. 5) tenemos una imagen de la Luna cuyo radio es de 7,5cm. Un método práctico para trabajar con la imagen sería en primer lugar, trazar dos perpendiculares que se intersecan en el centro de la figura (punto 0º). A partir de allí tomando como base la medida del radio de la imagen, aplicar la fórmula (1) y realizar la tabla del mismo modo que lo hicimos en la Tabla 1, sobre el segmento 0ºN. Luego trazamos paralelas que pasen por cada punto calculado.

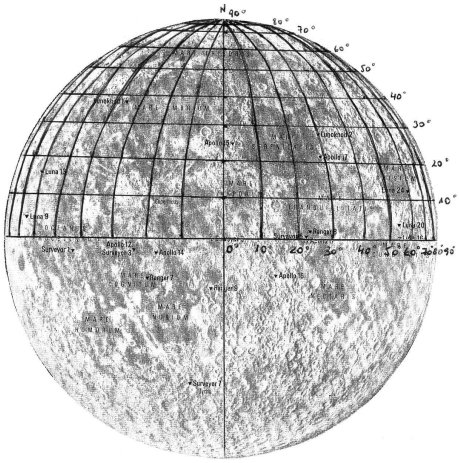

Figura 5

Una vez establecidas las paralelas, aplicamos el mismo método con cada uno de los radios, y finalmente unimos los puntos marcados en esos radios, para así trazar lo meridianos.

En Fig. 5 solo hemos trazado la red de paralelos y meridianos en la mitad de la imagen a los efectos de hacer notar cómo resalta la esfericidad de la Luna una vez que se aplica la grilla, mientras que “a simple vista” (parte inferior) esta es casi imposible de notar.

Es importante señalar que al establecer esta red, si tomamos un segmento esférico (por ejemplo, el que va del paralelo 10º al paralelo 20º) todos los sectores trazados en dicho segmento de la esfera “miden igual”. A pesar que por un efecto de perspectiva se vean diferentes, notemos que cuanto mas nos acercamos a ala periferia de la imagen de la Luna, estos sectores se van achicando, hasta que en los 90º se hacen prácticamente imperceptibles. En la superficie de la Luna todos estos sectores de un mismo segmento esférico miden la misma área.

Este efecto nos dice, por ejemplo, que si vemos un cráter en la periferia de la Luna que aparentemente tiene el mismo tamaño que otro cráter que se encuentra en el centro de la imagen, el cráter de la periferia tendrá sensiblemente mayor superficie que el que se encuentra en el centro de al imagen.

MEDICIÓN DE LA PROFUNDIDAD DE UN CRÁTER LUNAR

El siguiente problema con que se enfrentan los estudiantes es: ¿Cómo se podría medir la profundidad de un cráter lunar?

Para esta parte del trabajo, se usarán conceptos de coordenadas selenográficas. El Terminador, línea que separa el día de la noche lunar, avanza aproximadamente a 15Km/h. Observando como se desplaza en el transcurso del tiempo, los alumnos, con sus conocimientos de cinemática y proporcionalidad podrán calcularlo. Con una secuencia de fotografías que muestren como va cambiando la iluminación lunar en un lapso de tres días consecutivos, elegido un cráter, que en la primera observación se encuentre en el borde del terminador, los alumnos tendrán que calcular su profundidad, comenzando con aquellos que se encuentren en la zona frontal hacia la Tierra y luego los que se hallan próximos al limbo lunar. Lo mismo se trabajará cuando el cráter sea observado con la luz cenicienta. Los resultados que logren obtener se verificarán con los softwares pertinentes. Además se trabajará con diferentes escalas en cuanto a diferentes tamaños para efectuar los cálculos. El desplazamiento del Terminador en el

transcurso del tiempo, ayudará a encontrar la dirección norte y sur, por ende la línea que se tomará como referencia para medir la longitud lunar, la central. Como primera aproximación servirá contrastar con el software Atlas lunar para hallar con mayor precisión el norte sur lunar. Conocido esa línea y el ecuador lunar, los alumnos podrán posicionarse con las coordenadas de latitud y longitud para especificar algún accidente lunar.

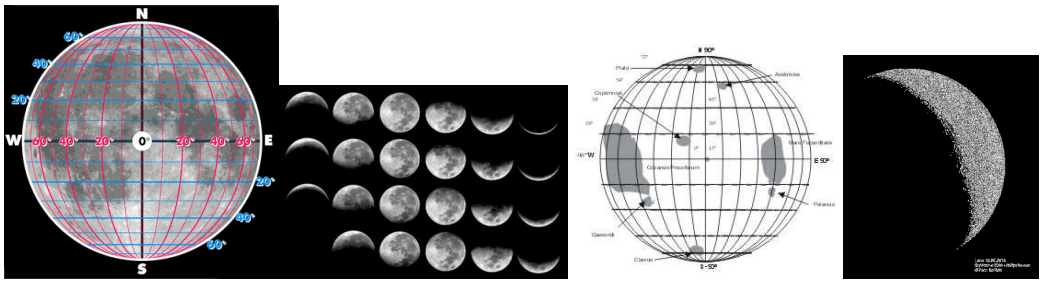

Figura 6

Escenografía del lugar y entender el problema:

Realizaremos la medición seleccionando los cráteres cercanos al Terminador lunar, que son los que tendrán mayor sombra para poder determinar su profundidad. Incentivamos al alumno a describir la situación y elaborar propuestas para llevar a cabo el logro de soluciones. El docente participará como facilitador y referente de conocimiento, aportando bibliografía pertinente, e induciendo a elaborar, ideas, conjeturas y refutaciones. Elegido un cráter se realizará un croquis mostrando las diferentes situaciones que se puedan dar, y mediante una expresión analítica, de acuerdo a la geometría del problema, se podrá generalizar y aplicar a cualquier situación que pueda presentarse.

Nos situamos en el punto P, ubicado, en el interior de un cráter. Este punto P, lugar donde llega la sombra, producida por la pared, cuya altura queremos medir, la denominaremos H. El Sol, ilumina parte del cráter, proyectando la sombra de la pared, hasta el punto P. Para resolverlo, necesitamos averiguar la altura del SOL. Teniendo en cuenta que H es la altura del cráter. Debemos averiguar: ¿Cómo calcular h, que es la altura del SOL, visto desde P?

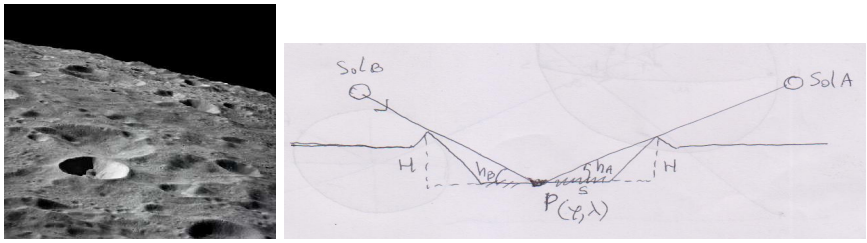

Figura 7

Crear un plan:

Los estudiantes tendrán que trabajar desde “lo que ve” el punto P en el cráter y lo que se observa de la Luna desde la Tierra. De esta manera podremos encontrar la relación de h, con el ángulo que nos permite ver la parte iluminada de la Luna, que lo denotaremos con alfa (α), que es el ángulo que forma el segmento que une los dos centros de la Luna y la Tierra con los rayos solares que llegan a la superficie lunar. Los alumnos realizarán un croquis para encontrar relaciones entre

el ángulo alfa, el radio lunar y el segmento ecuatorial lunar, iluminado por el Sol, mostrando relaciones geométricas útiles para calcular el valor de α.

Para definir h también necesitarán encontrar como está relacionado con el ángulo de la latitud φ y longitud λ de P. El estudio de sistemas de coordenadas astronómicas, permitirá el conocimiento de las construcciones geométricas en la esfera y en el plano mediante la trigonometría usando las coordenadas horizontales desde P, válido para cualquier región que se quiera estudiar de la superficie lunar.

LLevar a cabo el Plan:

Estamos buscando el ángulo bajo el cual se ve al Sol desde el punto P es decir, la altura del Sol respecto al horizonte, relación entre la fracción iluminada, el acimut y la longitud de P. El acimut del Sol visto desde P, será la diferencia entre α y λ.

Hallando la altura máxima del Sol e interpretar el resultado

Un grafico geométrico les permitirá hallar la relación entre la latitud y la altura. El gráfico les permitirá observar y encontrar que el Sol, podrá tener una altura h máxima = 90º - φ em P.

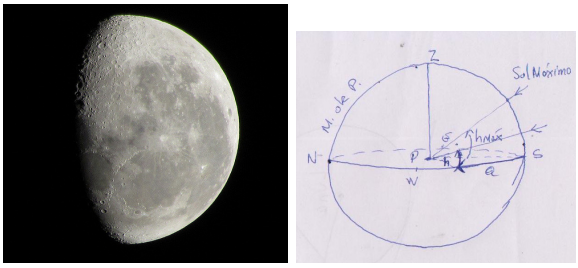

Figura 8

Con estos datos, y con el conocimiento previo de que el Sol visto desde la Luna se desplaza en círculos, encontrarán que h dependerá de a, es decir del acimut y como ya saben que el acimut se puede expresar en términos de alfa y la longitud, llegarán a las siguientes expresiones:

$$h = h\ máx\ .\ Cos\ (a) \qquad h = (90º - \alpha)\ .\ Cos(\alpha - \lambda)$$

Por lo tanto, ahora están en condiciones de relacionar H (altura del cráter), con h (altura del SOL) y la sombra que arroja la pared del cráter. La ecuación que relaciona estas tres cantidades es: H = long. de la sombra x tangente de h.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Trazado Geométrico – MONSALVE Mario González; CORTES Julian Palencia - 1992

Geometría Gráfica – COLLADO Vicente – 1987

Observar la Luna – FOLKES John S. – Editorial Tuttor – 2004

Calculus Astronomiques – MEUS Jean – Societe Astronomique de France –

Atlas of the moon – RUKL Antonin; KALMBACH Ed – 1993

La Astronomía en cuestiones – DROUIN Fabrice – Editorial Vuibert – 2004